Fähigkeiten für „Gleichungen“

Für die Aufgabe zum Thema „Gleichungen lösen“ sollten Sie folgendes beherrschen:

- Wahlweise die pq-Formel oder die abc-Formel zum Lösen quadratischer Gleichungen.
- Die Substitutionsmethode
- Den Satz vom Nullprodukt

Sie sollten außerdem die Nullstellen der Sinus- und Kosinus-Funktion kennen.

Lösen von Gleichungen - Tipps

Oftmals handelt es sich zumeist um „versteckte“ quadratische Gleichungen.

Hier ein paar Tipps:

- Eine Substitution führt häufig zu der quadratischen Gleichung.
- Sollten Nenner vorkommen, so ist es meist ratsam, die Gleichung mit allen Nennern zu multiplizieren, so dass diese wegfallen.
- Manchmal führt einfaches Ausklammern von x zu der quadratischen Gleichung.

Rechenbeispiel

Löse die Gleichung $e^{4x} - 11e^{2x} + 18 = 0$.

Setze $z := e^{2x}$, dann gilt $z^2 - 11z + 18 = 0$

p-q-Formel: $z_{1,2} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - \frac{72}{4}}$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{11}{2} \pm \frac{7}{2} \Rightarrow z_1 = 9, z_2 = 2.$$

Nun erfolgt die Rückersetzung:

$e^{2x} = 9 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\ln(9) = \ln\left(\sqrt{9}\right) = \ln(3)$ oder

$e^{2x} = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\ln(2) = \ln\left(\sqrt{2}\right)$

Ergebnis: $\underline{L = \left\{\ln\left(\sqrt{2}\right), \ln(3)\right\}}$

Aufgaben

PT 2008 - Aufgabe 3:

Löse die Gleichung $\frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^2} = 1;\ \ x \neq 0.$

PT 2012 - Aufgabe 3:

Lösen Sie für $0 \leq x \leq 2\pi$ die Gleichung

$\sin(x) \cdot \cos(x) - 2\cos(x) = 0.$

PT 2013 - Aufgabe 3:

Löse die Gleichung $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0.$

Aufgaben

PT 2015 - Aufgabe 3:

Lösen Sie die Gleichung $(x^3 - 3x)(e^{2x} - 5) = 0.$

PT 2017 - Aufgabe 2:

Lösen Sie die Gleichung $e^{4x} - 5 = 4e^{2x}$

Lösung PT 2008 – Aufgabe 3

$$\frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^2} = 1 \overset{\cdot\, x^4}{\Rightarrow} 6 + x^2 = x^4 \quad \overset{-x^2 - 6}{\Rightarrow} \quad x^4 - x^2 - 6 = 0$$

Ersetze $z := x^2$

$z^2 - z - 6 = 0$ |p-q-Formel

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \Rightarrow z_1 = 3;\ z_2 = -2$$

Rückersetzung: $x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}; x_2 = -\sqrt{3}$

$x^2 = -2 \Rightarrow \cancel{x_3 = \sqrt{-2}}$

Ergebnis: $\underline{L = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}}$

Lösung PT 2012 – Aufgabe 3

$\sin(x) \cdot \cos(x) - 2\cos(x) = 0 \mid \cos(x)$ ausklammern

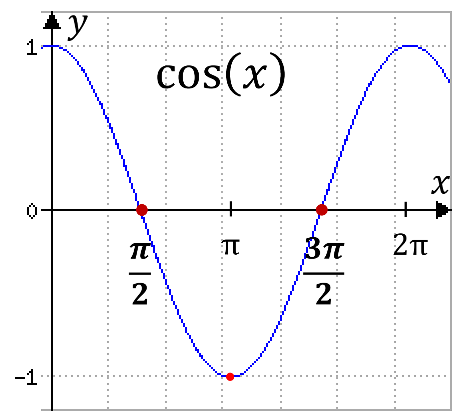
$\cos(x) \cdot (\sin(x) - 2) = 0$

Da $\sin(x)$ nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen kann, wird die Klammer nicht 0!

Nach dem Satz vom Nullprodukt kann die Gleichung nur dann 0 werden, wenn $\cos(x) = 0$ wird.

Dies ist für $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{3\pi}{2}$ der Fall, siehe Abb.

(beachte, dass $0 \le x \le 2\pi$ gelten soll).



Ergebnis: $L = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

Lösung PT 2013 – Aufgabe 3

$2e^{x} - \frac{4}{e^{x}} = 0 \qquad |\cdot e^{x}$

$2(e^{x})^2 - 4 = 0 \qquad |+4$

$2(e^{x})^2 = 4 \qquad |:2$

$(e^{x})^2 = 2 \qquad |\sqrt{}$

$e^{x} = \sqrt{2} \qquad |\ln \qquad\qquad \cancel{e^{x} = -\sqrt{2}}$

$x = \ln\sqrt{2}$

Ergebnis: $\underline{L = \{\ln\sqrt{2}\}}$

Lösung PT 2015 – Aufgabe 3

$(x^3 - 3x)(e^{2x} - 5) = 0$ | x ausklammern

$x(x^2 - 3)(e^{2x} - 5) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$\underline{x_1 = 0}$ oder $(x^2 - 3) = 0$ oder $(e^{2x} - 5) = 0$

$(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow \underline{x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}}$

$(e^{2x} - 5) = 0 \Rightarrow e^{2x} = 5 \Rightarrow 2x = \ln 5 \Rightarrow \underline{x = \frac{1}{2}\ln 5 = \ln\sqrt{5}}$

Ergebnis: $\underline{L = \left\{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, \frac{1}{2}\ln 5\right\}}$

Lösung PT 2017 – Aufgabe 2

$e^{4x} - 5 = 4e^{2x} \qquad | -4e^{2x}$

$e^{4x} - 4e^{2x} - 5 = 0$ | Setze $z := e^{2x}$ (Substitution)

$z^2 - 4z - 5 = 0$ | pq-Formel

$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+5} \;\Rightarrow\; z_{1,2} = 2 \pm 3$ also $z_1 = -1;\ z_2 = 5$

Rücksubstitution:

$e^{2x} = -1$ liefert keine Lösung, da $e^{2x} > 0$ für alle x.

$e^{2x} = 5 \quad | \ln$

$2x = \ln 5 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}\ln 5 = \ln 5^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{5}$

Ergebnis: $\underline{L = \left\{\frac{1}{2}\ln 5\right\}}$

Achtung Stolperfalle!

Lösen Sie die Gleichung $x^3 - x^2 - 6x = 0$.

Erster Versuch

$x^3 - x^2 - 6x = 0 \qquad |: x$

$x^2 - x - 6 = 0 \qquad |$pq-Formel

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Die Lösungen sind $x_1 = 3, x_2 = -2$.

Aber das ist nur die halbe Wahrheit!

Bei dieser Herangehensweise ist Ihnen „unterwegs“ nämlich die Lösung $x = 0$ verloren gegangen!

Was genau ist das Problem?

Die Division durch x gleich in der ersten Zeile ist das Problem!

$x^3 - x^2 - 6x = 0 \qquad |: x$

Solange $x \neq 0$ gilt, ist das Teilen durch x erlaubt.
Wenn aber $x = 0$ ist, darf nicht geteilt werden.

Wenn Sie also durch x teilen, dann schreiben Sie immer $x \neq 0$ dazu.

Fragen Sie sich dabei gleichzeitig „Was passiert bei $x = 0$“? Dann merken Sie, dass $x = 0$ tatsächlich eine der Lösungen der Gleichung ist!

… noch ein letzter Tipp

Tipp:

Wenn Sie Gleichungen lösen, achten Sie immer sorgfältig darauf, dass Ihnen bei den Umformungen keine Lösungen verloren gehen!!!

Besonders kritisch ist dabei das Teilen durch x.